Corrigé des exercices de révision pour bien aborder sa terminale

I. Polynômes :

Exercice 1 :

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 8$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^2 + 2x + 24$.

Soient C_f et C_g respectivement les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1.a) Etudier le signe de f.

b) Donner la forme factorisée de f.

c) Donner la forme canonique de f.

d) Donner le tableau de variation de f.

2.a) Etudier le signe de g.

b) Donner la forme factorisée de g.

c) Donner la forme canonique de g.

d) Donner le tableau de variation de g.

3.a) Quelles sont les valeurs interdites de l'expression $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{-2x^2 + 2x + 24}$, on note D son domaine de définition.

b) Pour tout $x \in D$, simplifier l'expression $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{-2x^2 + 2x + 24}$.

4. Etudier la position relative de C_f et de C_g.

1.a) $x^2 - 6x + 8$ a pour discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 4 = 2^2 > 0$, donc ses racines sont $x_1 = \dfrac{6-2}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{6+2}{2} = 4$. On a donc le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$x^2 - 6x + 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

car $a = 1 > 0$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 9 + 8 = (x-3)^2 - 1$.

d) Comme $a > 0$, on a :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2.a) $-2x^2 + 2x + 24$ a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times 24 = 196 = 14^2 > 0$, donc ses racines sont $x_1 = \dfrac{-2-14}{2 \times (-2)} = \dfrac{-16}{-4} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-2+14}{2 \times (-2)} = \dfrac{12}{-4} = -3$. On a donc le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$-2x^2 + 2x + 24$		$-$	0	$+$	0	$-$	

car $a = -2 < 0$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-2x^2 + 2x + 24 = -2(x+3)(x-4)$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-2x^2 + 2x + 24 = -2(x^2 - x - 12) = -2\left[\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} - 12\right] = -2\left[\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{49}{4}\right]$, donc

$g(x) = -2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{49}{2}$.

d) Comme $a < 0$, on a :

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
g		$\nearrow$	$\dfrac{49}{2}$	$\searrow$	

3.a) $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{-2x^2 + 2x + 24}$ est définie $\Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 24 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -3$ et $x \neq 4$, donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;4\}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3 ; 4\}$, $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{-2x^2 + 2x + 24} = \dfrac{(x-2)(x-4)}{-2(x+3)(x-4)} = \dfrac{x-2}{-2(x+3)}$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = (x-2)(x-4) - [-2(x+3)(x-4)]$

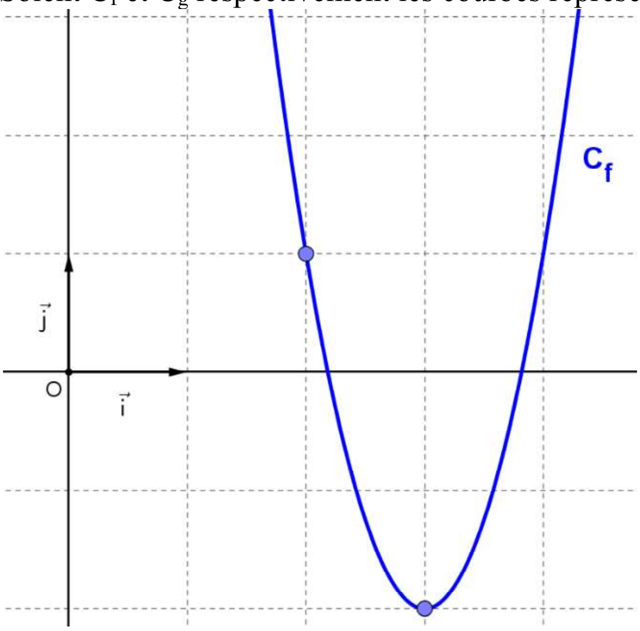
$$= (x-2)(x-4) + 2(x+3)(x-4)$$
$$= (x-4)[(x-2) + 2(x+3)]$$
$$= (x-4)(3x+4).$$

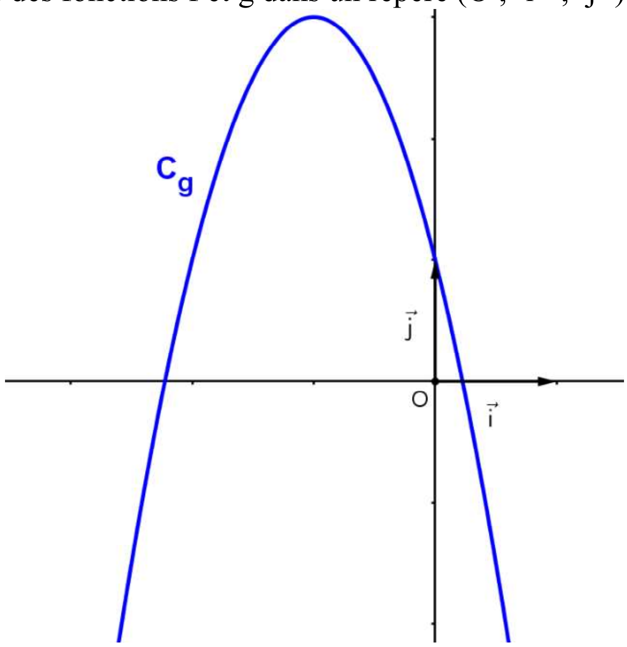
x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Position relative		C_f est strictement au-dessus de C_g		C_g est strictement au-dessus de C_f		C_f est strictement au-dessus de C_g	

<u>Exercice 2</u> :

Soient f et g deux polynômes du second degré définis sur $\mathbb{R}$ de la forme $ax^2 + bx + c$.

Soient C_f et C_g respectivement les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.





A l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :

1.a) Quel est le signe de a pour la fonction f ?

b) Quel est le signe du discriminant Δ de f ?

c) Quels sont les valeurs de α et de β de la forme canonique de la fonction f ?

d) Donner les valeurs de a, de b et de c pour la fonction f.

2.a) Quel est le signe de a pour la fonction g ?

b) Quel est le signe du discriminant Δ de g ?

c) Quel est le signe de c pour la fonction g ?

d) Quel est le signe de b pour la fonction g ?

1.a) D'après l'allure de la parabole, on sait que $a > 0$.

b) Comme la courbe coupe l'axe des abscisses $\Delta > 0$.

c) Le minimum de la courbe a pour coordonnées $(3 ; -2)$, donc $\alpha = 3$ et $\beta = -2$.

d) On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-3)^2 - 2$.

$f(2) = 1 \Leftrightarrow a(2-3)^2 - 2 = 1$

$\Leftrightarrow a - 2 = 1$

$\Leftrightarrow a = 3$, donc $f(x) = 3(x-3)^2 - 2 = 3(x^2 - 6x + 9) - 2 = 3x^2 - 18x + 25$.

2.a) D'après l'allure de la parabole, on sait que $a < 0$.

b) Comme la courbe coupe l'axe des abscisses $\Delta > 0$.

c) D'après le graphique, $f(0) > 0$ et $f(0) = c$, donc $c > 0$.

d) D'après le graphique, $\alpha < 0$, or $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $-2a > 0$, donc $b < 0$.

II. Dérivation :

Exercice 1 :

Donner l'expression de f '(x) en fonction de x, où f ' est la dérivée de la fonction f, dans les cas suivants :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 2$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = -\dfrac{3}{x^4}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 6x^4 - 3x^2 + 2x$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = (2 - x)(\sqrt{x} + 3)$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6}{x + 1}$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 5}$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (5x - 6)^5$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 2$.
   $f'(x) = -3$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = -\dfrac{3}{x^4} = -3 \times \dfrac{1}{x^4}$.
   $f'(x) = -3 \times \dfrac{-4}{x^5} = \dfrac{12}{x^5}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 6x^4 - 3x^2 + 2x$.
   $f'(x) = 6 \times 4x^3 - 3 \times 2x + 2 = 24x^3 - 6x + 2$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = (2 - x)(\sqrt{x} + 3)$.
   $f = uv$ avec $u(x) = 2 - x$, $u'(x) = -1$, $v(x) = \sqrt{x} + 3$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $f'(x) = -\sqrt{x} - 3 + \dfrac{2 - x}{2\sqrt{x}}$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6}{x + 1}$.
   $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x^2 + 6$, $u'(x) = 4x$, $v(x) = x + 1$ et $v'(x) = 1$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$,
   $f'(x) = \dfrac{4x(x + 1) - (2x^2 + 6)}{(x + 1)^2} = \dfrac{4x^2 + 4x - 2x^2 - 6}{(x + 1)^2} = \dfrac{2x^2 + 4x - 6}{(x + 1)^2}$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 5}$.
   $f = \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = x^2 - 3x + 5$ et $v'(x) = 2x - 3$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 5)^2} = \dfrac{-2x + 3}{(x^2 - 3x + 5)^2}$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (5x - 6)^5$.
   $f(x) = g(5x - 6)$ avec $g(x) = x^5$ et $g'(x) = 5x^4$, d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $f'(x) = 5g'(5x - 6) = 5 \times 5(5x - 6)^4 = 25(5x - 6)^4$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 8x + 2$ et soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. **Question de cours :**
   Rappeler la définition de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse a et donner son équation.
2. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}$ de coefficient directeur -6 ? Si, oui en quelle(s) abscisse(s) ?

1. La tangente à C_f au point d'abscisse a est la droite passant par ce point ayant pour coefficient directeur f '(a). Son équation est y = f '(a)(x – a) + f(a).
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -6x^2 + 8x - 8$.
3. f '(2) = – 16, f(2) = – 14, donc l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est : y = f '(2)(x – 2) + f(2), soit y = – 16(x – 2) – 14, soit y = – 16x + 18.
4. $f'(x) = -6 \Leftrightarrow -6x^2 + 8x - 8 = -6$

$$\Leftrightarrow -6x^2 + 8x - 2 = 0$$

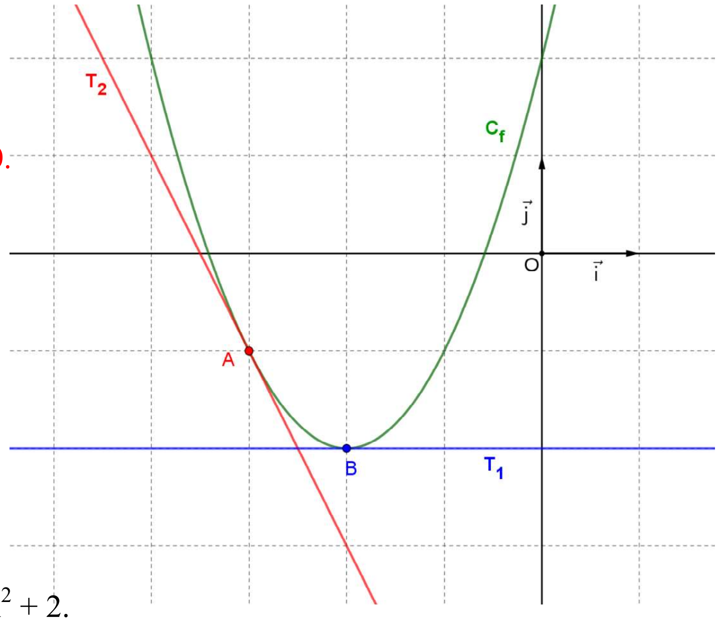
$$\Leftrightarrow -3x^2 + 4x - 1 = 0,\ \Delta = 16 - 12 = 4,\ \text{donc } x_1 = \frac{-4-2}{-6} = 1 \text{ et } x_1 = \frac{-4+2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

Il existe donc deux tangentes répondant à la question aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{3}$.

Exercice 3 :

On a représenté graphiquement C_f la courbe représentative de la fonction f et T_1 et T_2 respectivement ses tangentes en A et en B.

1. Graphiquement, donner les valeurs de f(– 3), f '(– 3), f(– 2) et f '(– 2).
2. En déduire les équations de T_1 et de T_2.



1. f(– 3) = – 1, f '(– 3) = – 2, f(– 2) = – 2 et f '(– 2) = 0.
2. T_1 a pour équation : y = f '(– 3)(x – (– 3)) + f(– 3), soit y = – 2(x + 3) – 1, ce qui donne y = – 2x – 7.
   T_2 a pour équation : y = f '(– 2)(x – (– 2)) + f(– 2), soit y = 0 × (x + 2) – 2, ce qui donne y = – 2.

Exercice 4 :

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 2$.
   a) Calculer l'expression de g'(x) pour $x \in \mathbb{R}$.
   b) Dresser le tableau de variation de g. Quels sont les extrema locaux de g ?
   c) En déduire le signe de g sur]– 4 ; + ∞[.
2. Soit f la fonction définie sur]– 4 ; + ∞[par $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x + 4}$ et C_f sa courbe représentative.
   a) Calculer l'expression de f '(x) pour x ∈]– 4 ; + ∞[.
   b) En s'aidant de la question 1., dresser le tableau de variation de f.
   c) Montrer que C_f admet des points d'abscisse a en lesquels leur tangente à la courbe est parallèle à Δ, droite d'équation $y = \frac{1}{8}x$, s'ils sont solution de l'équation $a(16a^2 + 95a - 8) = 0$.

   Si oui, dire combien de points répondent à la question sans préciser leurs abscisses.

1.a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 6x^2 + 24x = 6x(x + 4)$.

b)

x	– ∞		– 4		0		+ ∞
g'(x)		+	0	–	0	+	
g		↗	66	↘	2	↗	

g atteint un maximum de 66 en – 4 et un minimum de 2 en 0.

c) Sur]– 4 ; + ∞[, g a un minimum de 2, donc g > 0.

2.a) Sur]– 4 ; + ∞[, $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3 - 2$, $u'(x) = 3x^2$, $v(x) = x + 4$ et $v'(x) = 1$, d'où

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+4) - (x^3 - 2)}{(x+4)^2} = \frac{2x^3 + 12x^2 + 2}{(x+4)^2} = \frac{g(x)}{(x+4)^2}.$$

b) Pour tout $x \in]-4\,;+\infty[$, $g(x) > 0$ et $(x+4)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

x	-4	$+\infty$
f	$\|\|$	$\nearrow$

c) La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est parallèle à $\Delta \Leftrightarrow f'(a)$ est égal au coefficient directeur de Δ

$$\Leftrightarrow f'(a) = \frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2a^3 + 12a^2 + 2}{(a+4)^2} = \frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow 8(2a^3 + 12a^2 + 2) = (a+4)^2$$
$$\Leftrightarrow 16a^3 + 96a^2 + 16 = a^2 + 8a + 16$$
$$\Leftrightarrow 16a^3 + 95a^2 - 8a = 0$$
$$\Leftrightarrow a(16a^2 + 95a - 8) = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } 16a^2 + 95a - 8 = 0$$
$$(\Delta = 95^2 - 4 \times 16 \times (-8) = 9537 > 0)$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = \frac{-95 - \sqrt{9537}}{32} = \frac{-95 - 17\sqrt{33}}{32}$$
$$\text{ou } a = \frac{-95 + \sqrt{9537}}{32} = \frac{-95 + 17\sqrt{33}}{32}.$$

Cela fait donc trois points, mais deux seulement sont supérieur à – 4.

III. Probabilités-Variables aléatoires-Suites :

Exercice 1 :

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si besoin, à 10^{-3} près.

Elsa a préparé un grand saladier de billes de chocolat pour son anniversaire. On y trouve :

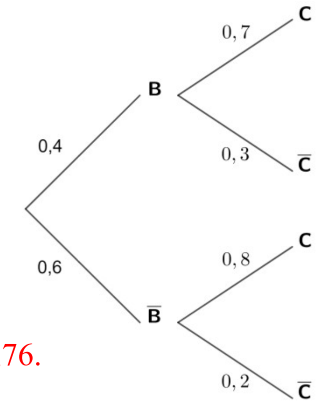
• 40 % de billes au chocolat blanc, les autres étant au chocolat noir ;
• parmi les billes au chocolat blanc, 70 % sont fourrées au café ; les autres sont fourrées au praliné ;
• parmi les billes au chocolat noir, 80 % sont fourrées au café ; les autres sont fourrées au praliné.

Un invité prend une bille de chocolat au hasard dans le saladier. On définit les évènements suivants :

• B : « l'invité prend une bille au chocolat blanc » ; • C : « l'invité prend une bille fourrée au café ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Calculer la probabilité de l'évènement : «l'invité prend une bille au chocolat blanc fourrée au café ».
3. Montrer que la probabilité que l'invité prenne une bille fourrée au café vaut 0,76.
4.a) Sachant que la bille est fourrée au café, quelle est la probabilité que l'invité ait pris une bille au chocolat blanc ?
  b) Sachant que la bille n'est pas fourrée au café, quelle est la probabilité que l'invité ait pris une bille au chocolat noir ?
5. Elsa souhaite que 72 % des billes qu'elle prépare soient fourrées au café. Elle change donc les proportions de billes au chocolat blanc.
   Quelle proportion p de billes au chocolat blanc doit-elle prévoir pour atteindre cet objectif ?
   Indication : refaire l'arbre avec la valeur p.

1.



2. $P(B \cap C) = P(B) \times P_B(C) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.
3. Comme B et $\overline{B}$ réalisent une partition de l'univers,
   d'après la formule des probabilités totales,
   $P(C) = P(\overline{B} \cap C) + P(B \cap C) = P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(C) + 0,28 = 0,6 \times 0,8 + 0,28 = 0,76$.

4.a) $P_C(B) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,28}{0,76} = \dfrac{7}{19} \simeq 0,368$.

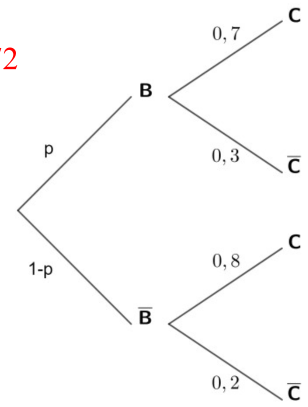
b) $P_{\overline{C}}(\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(\overline{C})}{1 - P(C)} = \dfrac{0,6 \times 0,2}{1 - 0,76} = \dfrac{0,12}{0,24} = 0,5$.

5. On a donc $P(B) = p$ et $P(\overline{B}) = 1 - p$, d'où : $P(C) = 0{,}72 \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap C) + P(B \cap C) = 0{,}72$

$\Leftrightarrow 0{,}7p + 0{,}8(1 - p) = 0{,}72$

$\Leftrightarrow -0{,}1p = -0{,}08$

$\Leftrightarrow p = 0{,}8$, soit 80 % de billes blanches.



Exercice 2 :

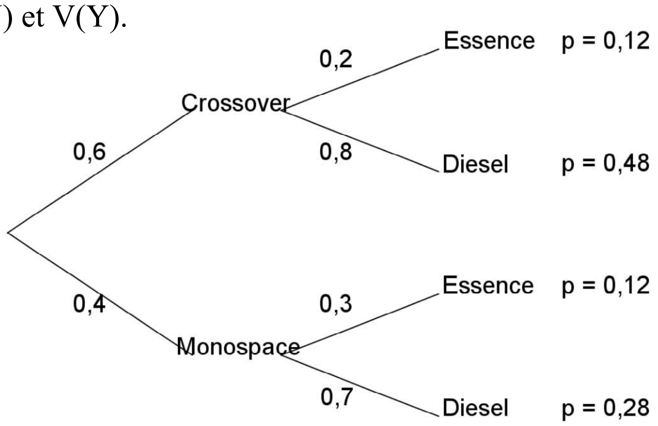
Un concessionnaire automobile vend deux versions de voitures : des monospaces et des crossovers.
Pour chaque version, il existe deux motorisations : essence ou diesel.
On choisit au hasard une fiche d'un client ayant acheté une voiture.
On s'intéresse aux événements suivants :
M : « La voiture est un monospace » ; C : « La voiture est un crossover » ; D : « La voiture est un diesel ».
On sait que : 60 % des clients ont acheté un crossover ;
80 % des crossover ont une motorisation diesel ;
30 % des monospaces ont une motorisation essence ;

1. Représenter la situation par un arbre.
2. Calculer :
   a) $P(M)$, la probabilité que la voiture soit un monospace ;
   b) $P(M \cap D)$, la probabilité que la voiture soit un monospace diesel ;
   c) $P(C \cap \overline{D})$, la probabilité que la voiture soit un crossover essence.
3. Dans le tableau ci-dessous, on donne les prix pratiqués :

Version	Monospace		Crossover	
Motorisation	Essence	Diesel	Essence	Diesel
Prix de vente en milliers d'euros	23	27	20	25

On définit la variable aléatoire X donnant le prix de la voiture.
   a) Donner la loi de probabilité de X.
   b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
   c) L'année suivante les prix des voitures ont augmenté de 10 %, alors le concessionnaire fait une remise d'un millier d'euros sur chaque modèle. Soit Y la variable aléatoire donnant le nouveau prix de la voiture. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

1.



2.a) $P(M) = 0{,}4$; b) $P(M\cap D) = 0{,}28$; c) $P(C\cap\overline{D}) = 0{,}12$.

3.a)

x_i	20	23	25	27
$p(X = x_i)$	0,12	0,12	0,48	0,28

b) $E(X) = 0{,}12 \times 20 + 0{,}12 \times 23 + 0{,}48 \times 25 + 0{,}28 \times 27 = 24{,}72$;
$V(X) = 0{,}12 \times 20^2 + 0{,}12 \times 23^2 + 0{,}48 \times 25^2 + 0{,}28 \times 27^2 - 24{,}72^2 = 4{,}5216$.

c) On a donc $Y = 1{,}1X - 1$, d'où $E(Y) = E(1{,}1X - 1) = 1{,}1E(X) - 1 = 26{,}192$;
$V(Y) = V(1{,}1X - 1) = 1{,}1^2V(X) = 5{,}471136$.

Exercice 3 :

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

• Un salarié malade est absent

• La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.

• Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine n + 1 avec une probabilité égale à 0,04.

• Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine n + 1 avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par E_n l'évènement : « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine».

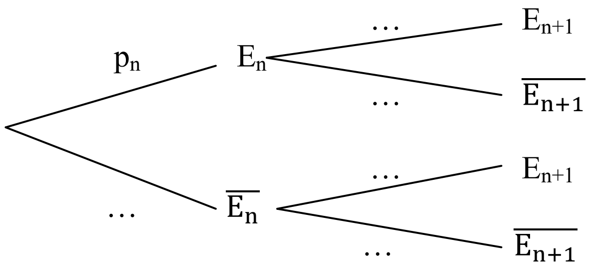
On note p_n la probabilité de l'évènement E_n. On a ainsi $p_1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq p_n < 1$.

1.a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

c) Les événements E_2 et E_3 sont-ils indépendants ?

2.a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous :



b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}04$.

c) Montrer que la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = p_n - 0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q. En déduire l'expression de u_n, puis de p_n en fonction de n et q.

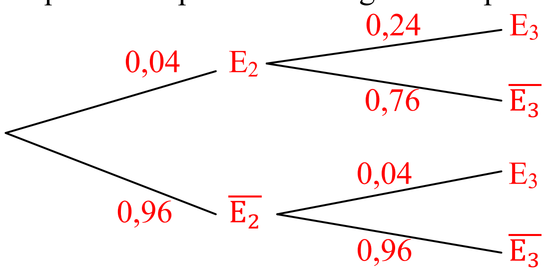
d) En déduire la limite de la suite (p_n).

e) On considère le programme python suivant :

```
P = 0
J = 1
k = int(input("k="))
while P < (0,05–10^(–k)) :
      P =0,2*P+0,04
       J =J+1
print(J)
```

A quoi correspond l'affichage final J pour k = 5 ? Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

1.a)



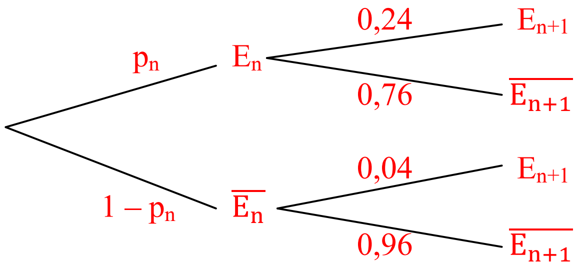
Comme E_2 et $\overline{E_2}$ réalisent une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales,

$p_3 = p(E_3) = p(E_2 \cap E_3) + p(\overline{E_2} \cap E_3) = p(E_2)p_{E_2}(E_3) + p(\overline{E_2})p_{\overline{E_2}}(E_3) = 0{,}04 \times 0{,}24 + 0{,}96 \times 0{,}04 = 0{,}048.2$

b) $p_{E_3}(E_2) = \dfrac{p(E_2 \cap E_3)}{p(E_3)} = \dfrac{p(E2)p_{E_2}(E3)}{p(E3)} = \dfrac{0{,}04 \times 0{,}24}{0{,}048} = 0{,}2.$

c) Comme $p(E_2) = 0{,}04$, $p(E_2) \neq p_{E_3}(E_2)$, les événements ne sont pas indépendants.

2.a)



b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme E_n et $\overline{E_n}$ réalisent une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, $p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = p(E_n)p_{E_n}(E_{n+1}) + p(\overline{E_n})p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = 0{,}24p_n + 0{,}04(1 - p_n)$, d'où $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}04$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}05 = 0{,}2p_n + 0{,}04 - 0{,}05 = 0{,}2p_n - 0{,}01 = 0{,}2(p_n - 0{,}05) = 0{,}2u_n$, donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2 et de terme initial $u_1 = p_1 - 0{,}05 = -0{,}05$.

On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}$, d'où $p_n = 0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{n-1} = 0{,}05 - 0{,}25 \times 0{,}2^n$.

d) Comme $-1 < 0{,}2 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}05$.

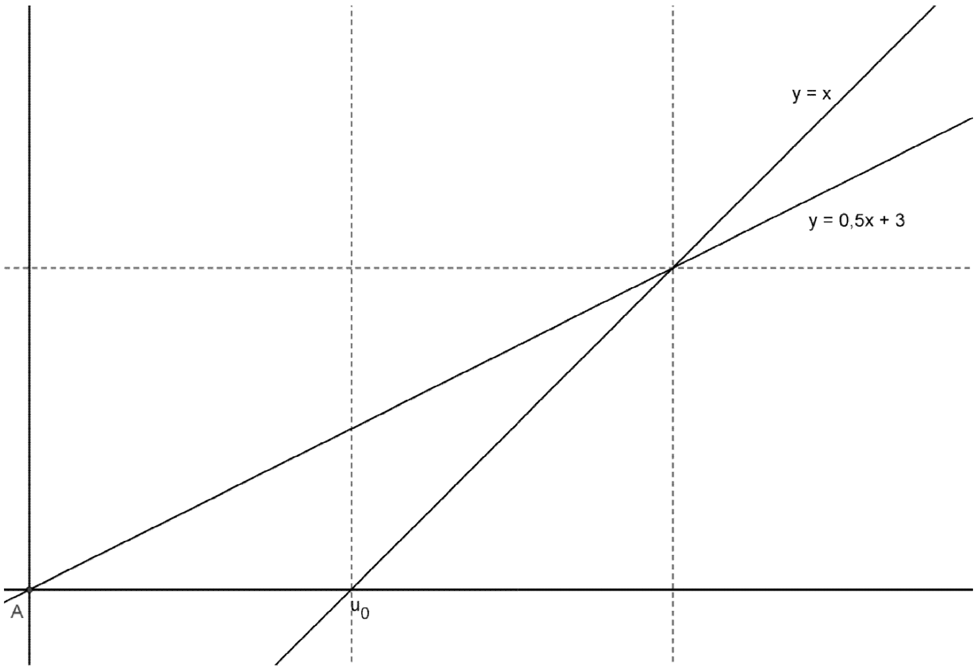
e) Ce programme donne le premier indice j à partir duquel p_j est à une distance inférieure à 10^{-k} de 0,05.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}05$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que, pour tout $n \geq n_0$, $p_n \in [0{,}05 - 10^{-k} ; 0{,}05 + 10^{-k}]$, j correspond donc à n_0.

Exercice 4 :

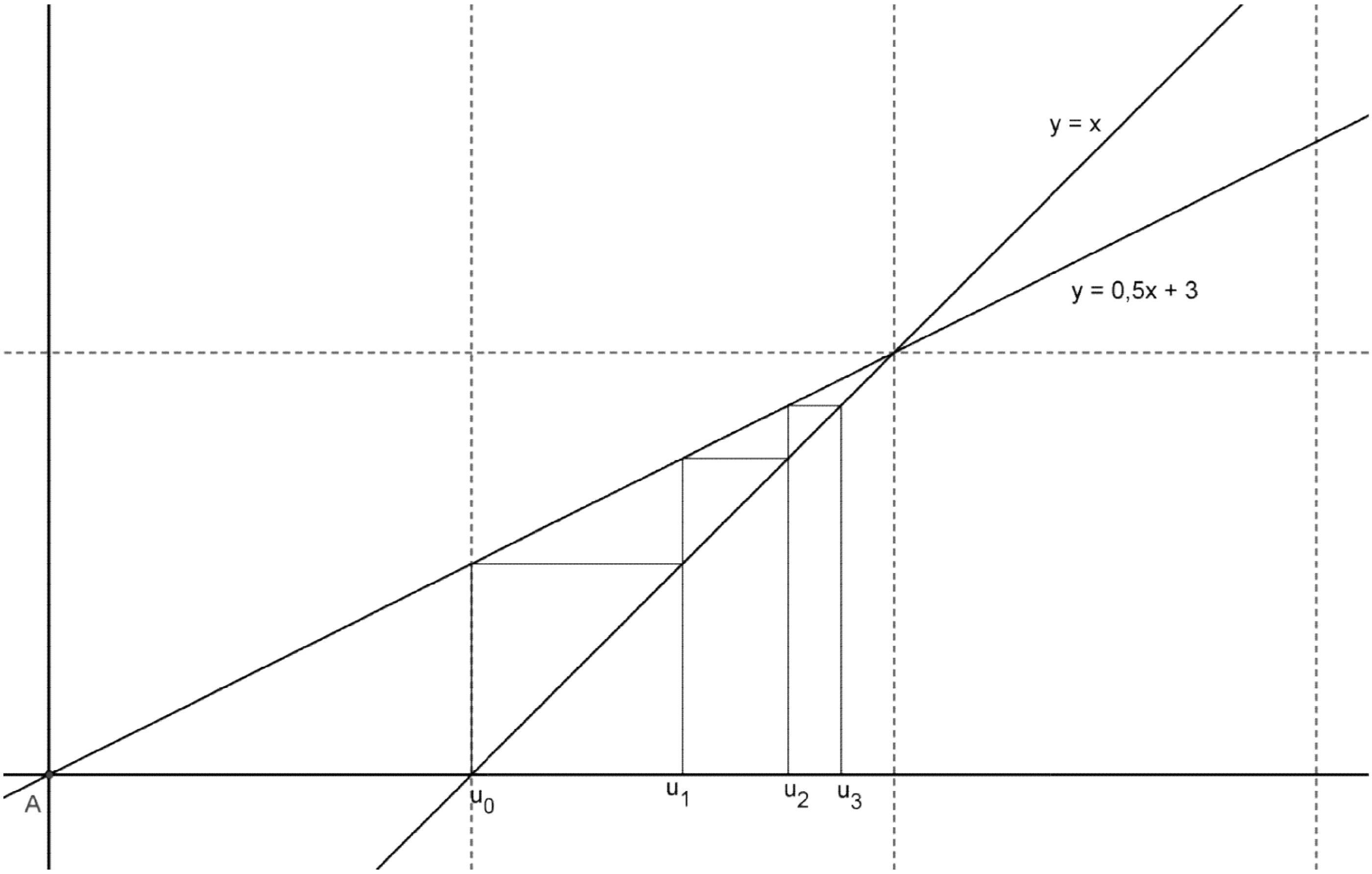
Soit (u_n) une suite telle que $u_0 = 5$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On a placé le point A(4 ; 5) et les axes d'équation $x = 4$ et $y = 5$.
   On a tracé ci-dessous les droites d'équation $y = x$ et $y = 0{,}5x + 3$ et placé u_0 sur l'axe horizontal.
   Construire sur l'axe horizontal les termes u_1, u_2, u_3 et u_4 de la suite.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial v_0.
   b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   c) Calculer $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{13}$. (On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près).
   d) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
   e) En utilisant le résultat de la question 3.c), calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{13}$.
   (On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près).



1. $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 + 3 = \dfrac{5}{2} + 3 = \dfrac{11}{2}$ et $u_2 = \dfrac{1}{2}u_1 + 3 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{11}{2} + 3 = \dfrac{23}{4}$.

2.



3.a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de terme initial $v_0 = u_0 - 6 = 5 - 6 = -1$.

b) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{13} = v_0 \times \dfrac{1-q^{14}}{1-q} = -\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{14}}{1-\frac{1}{2}} = -2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{14}\right) \simeq -2$ à 10^{-2} près.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 6 = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$.

e) $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{13} = v_0 + 6 + v_1 + 6 + v_2 + 6 + \ldots + v_{13} + 6 = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{13} + 14 \times 6 \simeq 82$ à 10^{-2} près.

IV. Exponentielle :

Exercice 1 :

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \dfrac{e^3 \times e^{-1}}{e^7}$; 2. $B = e^{7x} \times \dfrac{e^x}{e^8}$; 3. $C = \dfrac{e^{-x-3}}{e^{7x+1}}$; 4. $D = \dfrac{e^{2x} - e^{3x}}{e^{2x}}$; 5. $E = (e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2$.

1. $A = \dfrac{e^3 \times e^{-1}}{e^7} = e^{3-1-7} = e^{-5}$;

2. $B = e^{7x} \times \dfrac{e^x}{e^8} = e^{7x+x-8} = e^{8x-8}$;

3. $C = \dfrac{e^{-x-3}}{e^{7x+1}} = e^{-x-3-7x-1} = e^{-8x-4}$;

4. $D = \dfrac{e^{2x} - e^{3x}}{e^{2x}} = \dfrac{e^{2x}(1 - e^x)}{e^{2x}} = 1 - e^x$;

5. $E = (e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} - 2e^xe^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} - 2e^xe^{-x} - e^{-2x} = -4e^xe^{-x} = -4$.

Exercice 2 :

1. Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{3x-6} = 1$; b) $e^{x^2+2x} = e^3$; c) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.

2. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $e^{2x+4} < 1$; b) $e^{x+4} > \dfrac{1}{e^{-2x+1}}$; c) $(e^x - 1)e^x \geq -2(e^x - 1)$.

1.a) $e^{3x-6} = 1 \Leftrightarrow 3x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 3x = 6$

$\Leftrightarrow x = 2$, donc $S = \{2\}$.

b) $e^{x^2+2x} = e^3 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 3$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$, $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 = 4^2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2-4}{2} = -3$ ou $x = \dfrac{-2+4}{2} = 1$, donc $S = \{-3 ; 1\}$.

c) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 + 2X - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X = -3 \text{ ou } X = 1 \\ \text{d'après b} \end{cases}$

$\Leftrightarrow e^x = -3 < 0$, donc impossible ou $e^x = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$, donc $S = \{0\}$.

2.a) $e^{2x+4} < 1 \Leftrightarrow 2x + 4 < 0$

$\Leftrightarrow 2x < -4$

$\Leftrightarrow x < -2$, donc $S =]-\infty ; -2[$.

b) $e^{x+4} > \dfrac{1}{e^{-2x+1}} \Leftrightarrow e^{x+4} > e^{2x-1}$

$\Leftrightarrow x + 4 > 2x - 1$

$\Leftrightarrow 5 > x$, donc $S =]-\infty ; 5[$.

c) $(e^x - 1)e^x \geq -2(e^x - 1) \Leftrightarrow (e^x - 1)e^x + 2(e^x - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x + 2) \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$, car $e^x + 2 > 0$ puisque $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^x \geq 1$

$\Leftrightarrow x \geq 0$, donc $S = [0 ; +\infty[$.

Exercice 3 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{4x-5}$; 2. $f(x) = (x^2 + x)e^x$; 3. $f(x) = xe^{-x}$; 4. $f(x) = \dfrac{e^{2x-1}}{1 + e^x}$.

1. $f(x) = e^{4x-5}$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4\,e^{4x-5}$.
2. $f(x) = (x^2 + x)e^x$, $f = uv$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x + 1$, $v(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$, donc,
$f'(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x)e^x = (x^2 + 3x + 1)e^x$.
3. $f(x) = xe^{-x}$, $f = uv$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^{-x}$ et $v'(x) = -e^{-x}$, donc
$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$.
4. $f(x) = \dfrac{e^{2x-1}}{1 + e^x}$, $f = \dfrac{u}{v}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = e^{2x-1}$, $u'(x) = 2e^{2x-1}$, $v(x) = 1 + e^x$ et $v'(x) = e^x$, donc
$f'(x) = \dfrac{2e^{2x-1} \times (1 + e^x) - e^{2x-1} \times e^x}{(1 + e^x)^2} = \dfrac{e^{2x-1}[2(1 + e^x) - e^x]}{(1 + e^x)^2} = \dfrac{e^{2x-1}(2 + e^x)}{(1 + e^x)^2}$.

Exercice 4 :

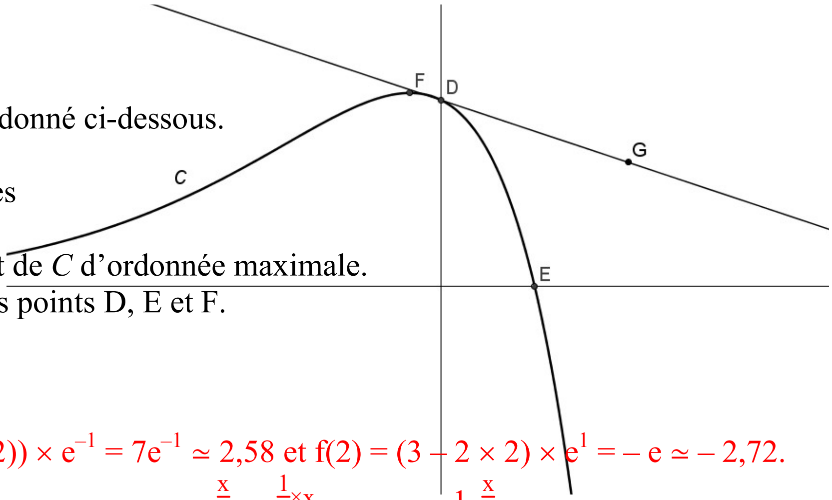
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 - 2x)e^{\frac{x}{2}}$.

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Calculer $f(0)$, $f(-2)$ et $f(2)$. Donner, de plus, une valeur arrondie à 10^{-2} près de $f(-2)$ et de $f(2)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{2} - x\right)e^{\frac{x}{2}}$.

3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Question bonus : Un dessin de la courbe C est donné ci-dessous.
Les unités ont été effacées.
Le point D est l'intersection de C avec l'axe des ordonnées et le point E est l'intersection de C avec l'axe des abscisses. Le point F est le point de C d'ordonnée maximale.
a) Donner la valeur exacte des coordonnées des points D, E et F.
b) Soit G le point de coordonnées (3 ; 2).
La droite (DG) est-elle tangente à C en D ?
Justifier la réponse.



1. $f(0) = (3 - 2 \times 0) \times e^0 = 3$, $f(-2) = (3 - 2 \times (-2)) \times e^{-1} = 7e^{-1} \simeq 2{,}58$ et $f(2) = (3 - 2 \times 2) \times e^1 = -e \simeq -2{,}72$.

2. $f = uv$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = 3 - 2x$, $u'(x) = -2$, $v(x) = e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{1}{2}\times x}$ et $v'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, donc,

$$f'(x) = -2\,e^{\frac{x}{2}} + (3 - 2x) \times \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = (-2 + \frac{3}{2} - x)\ e^{\frac{x}{2}} = \left(-\frac{1}{2} - x\right)e^{\frac{x}{2}}.$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{\frac{x}{2}} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-\frac{1}{2} - x$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-\frac{1}{2} - x$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$4e^{-\frac{1}{4}}$	$\searrow$	

$f(-\frac{1}{2}) = 4e^{-\frac{1}{4}} \simeq 3{,}12$.

4. $y_D = f(0) = 3$, donc $D(0 ; 3)$, $F(-\frac{1}{2} ; 4e^{-\frac{1}{4}})$ et

$$f(x_E) = 0 \Leftrightarrow (3 - 2x_E)\, e^{\frac{x_E}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2x_E = 0, \text{ car } e^{\frac{x_E}{2}} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x_E = \frac{3}{2}, \text{ donc } E(\frac{3}{2} ; 0).$$

$f'(0) = -\frac{1}{2}$ et (DG) a pour coefficient directeur $\frac{2-3}{3-0} = -\frac{1}{3}$, donc le coefficient directeur de la droite n'est pas égal au nombre dérivé en 0, ce n'est donc pas la tangente.

Exercice 5 :

On considère une fonction f définie et dérivable sur [– 4 ; 3]. On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On admet que Γ passe par le point A(0 ; 4) et que la tangente en A à Γ passe par B(– 2 ; 8).
1. Déterminer f(0).
2.a) Quel est le coefficient directeur de (AB) ?
b) En déduire f '(0).
3. On admet qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = (ax + b)e^{2x}$.
a) Calculer f '(x) en fonction de a et de b.
b) Calculer a et b.

1. $f(0) = 4$.

2.a) Le coefficient directeur de (AB) est $\frac{8-4}{-2-0} = -2$.

b) La tangente en A a pour coefficient directeur – 2, donc $f'(0) = -2$.

3.a) $f = uv$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = ax + b$ et $v(x) = e^{2x}$, d'où $u'(x) = a$ et $v'(x) = 2e^{2x}$.
$f' = u'v + uv'$, d'où $f'(x) = ae^{2x} + (ax + b)2e^{2x} = e^{2x}\,(a + 2ax + 2b)$.

b) $\begin{cases} f(0) = 4 \\ f'(0) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a + 2b = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -10 \end{cases}$.

V. Vecteurs-Produit scalaire et applications :

Exercice 1 :

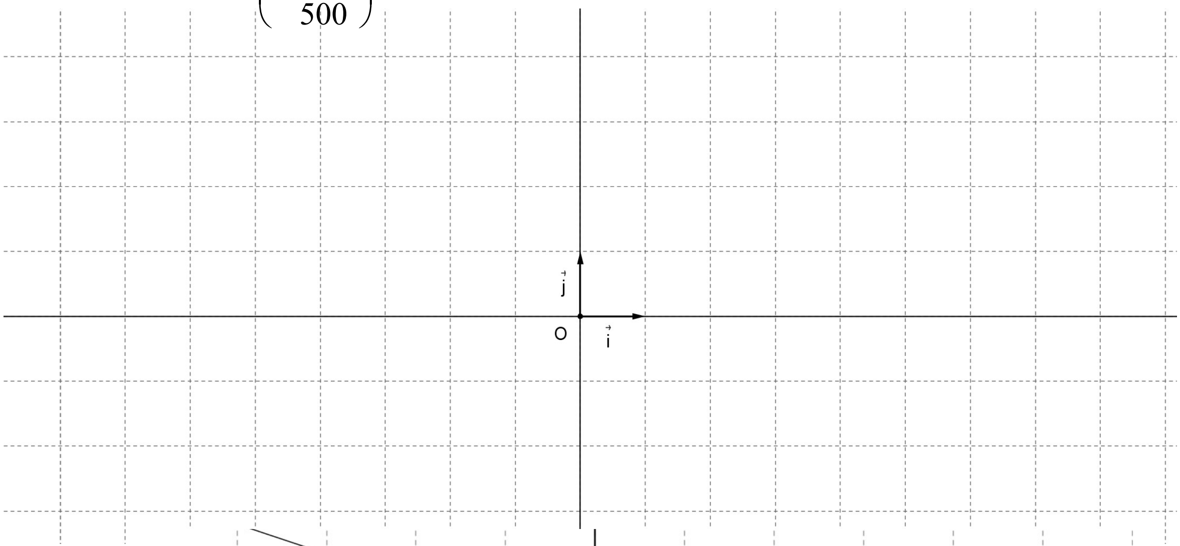
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soient A, B et C les points de coordonnées respectives $(-1 ; 3)$, $(2 ; 2)$ et $(1 ; -1)$.

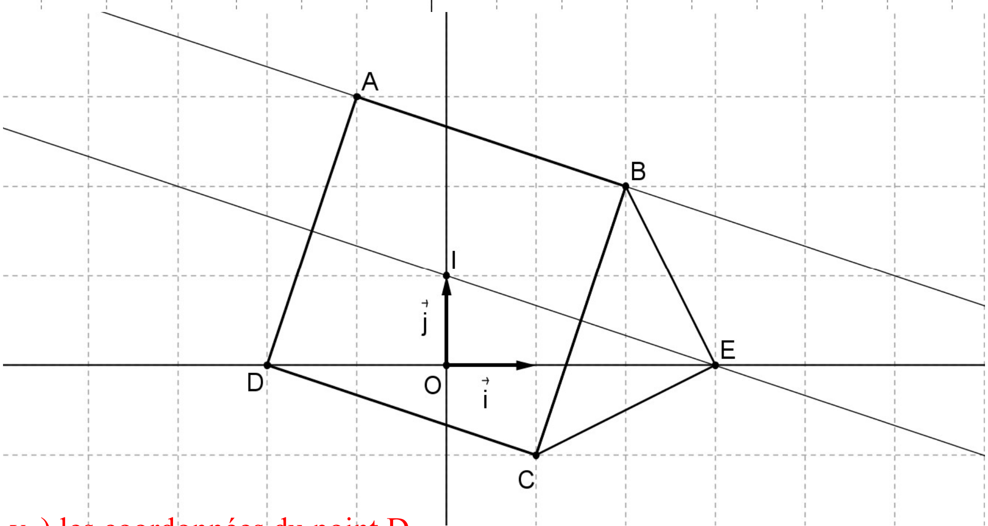
1. Compléter la figure ci-contre au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer les coordonnées $(x_D ; y_D)$ du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
3. Calculer les coordonnées du point I centre du parallélogramme ABCD.
4. Soit E le point de coordonnées $(3 ; 0)$.
   Calculer la longueur des côtés du triangle BCE et déterminer la nature exacte de ce triangle.

5.a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, que peut-on en déduire pour les droites (IE) et (AB).

b) Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\dfrac{289}{500} \end{pmatrix}$ est-il colinéaire avec $\overrightarrow{AB}$?



1.



2. Soit $(x_D ; y_D)$ les coordonnées du point D.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1 - x_D \\ -1 - y_D \end{pmatrix}$, on a donc :

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 1 - x_D \\ -1 = -1 - y_D \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = 0 \end{cases}$, donc $D(-2 ; 0)$.

3. Soit $(x_I ; y_I)$ les coordonnées du point I.

I centre du parallélogramme ABCD $\Leftrightarrow$ I milieu de [AC]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{-1+1}{2} = 0 \\ y_I = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$, on a donc I(0 ; 1).

4. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$, donc $BC = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, donc $BE = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, donc $CE = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

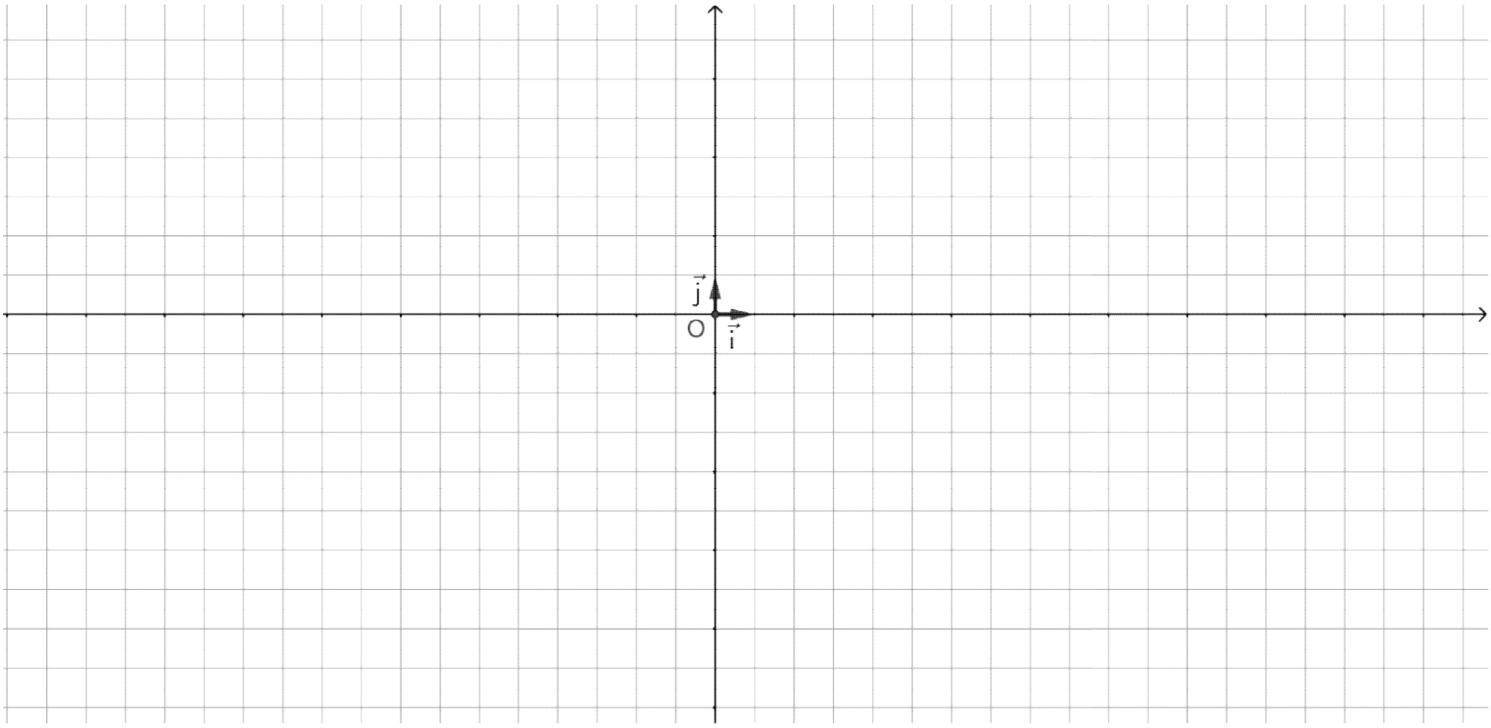
BE = CE, donc BCE est un triangle isocèle en E.
Par ailleurs, comme $BE^2 + CE^2 = 5 + 5 = 10 = BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en E.

5.a) $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et les droites (IE) et (AB) sont donc parallèles.

b) $\det(\vec{u}\ ;\overrightarrow{AB}) = \sqrt{3} \times (-1) - \left(-\dfrac{289}{500}\right) \times 3 = -\sqrt{3} + \dfrac{867}{500} \neq 0$, car $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercice 2 :

Soient A, B, C trois points de coordonnées respectives (1 ; 4), (5 ; 2), (– 4 ; – 4).
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB). La représenter.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite parallèle à (AB) passant par C. La représenter.
3. Soit d la droite d'équation 5x – 7y – 28 = 0.
a) Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de d.
b) Représenter d.
c) Trouver par le calcul les coordonnées du point E intersection de (AB) et de d.



1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB), donc (AB) a une équation cartésienne de la forme $-2x - 4y + c = 0$.
A ∈ (AB), donc ses coordonnées vérifient l'équation de (AB), d'où $-2 \times 1 - 4 \times 4 + c = 0$, soit $c = 18$.
Une équation cartésienne de (AB) est donc $-2x - 4y + 18 = 0$ ou $x + 2y - 9 = 0$.
2. $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de cette droite qui a donc une équation cartésienne de la forme $x + 2y + c = 0$.
C appartient à la droite, donc ses coordonnées vérifient son équation, d'où $(-4) + 2 \times (-4) + c = 0$, soit $c = 12$.
Une équation cartésienne de la droite est donc $x + 2y + 12 = 0$.

3.a) Un vecteur directeur de d a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

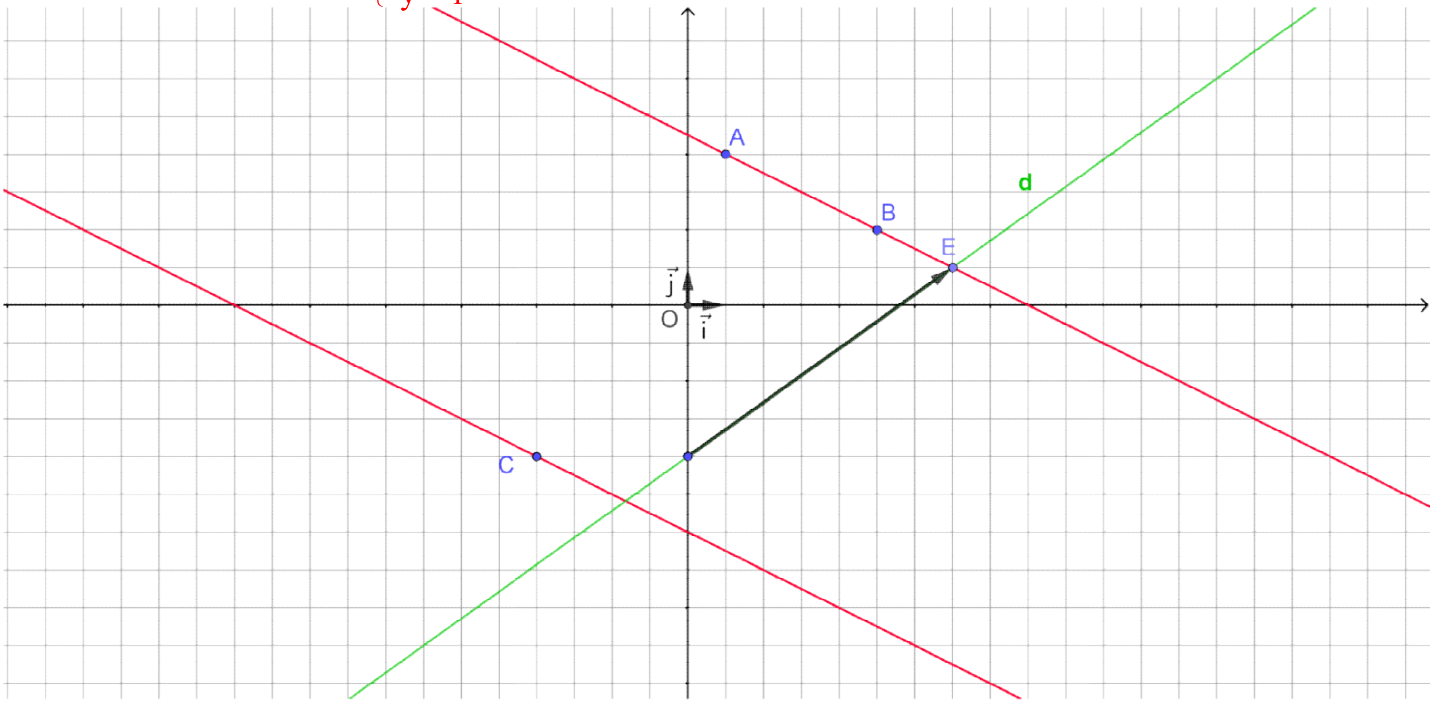
b) Si x = 0, 0 – 7y – 28 = 0, d'où y = – 4, donc d passe par le point de coordonnées (0 ; 4).

c) $E(x\,;y) \in (AB) \cap d \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 9 = 0 & L_1 \\ 5x - 7y - 28 = 0 & L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 9 = 0 & L_1 \\ 17y - 17 = 0 & 5L_1 - L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \times 1 - 9 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

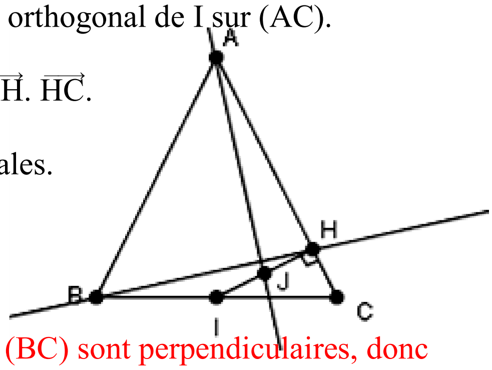
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$, donc E(7 ; 1).



Exercice 3 :

Soient ABC un triangle isocèle en A, I le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de I sur (AC).

1. Calculer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$. En déduire que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CH}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{HI}$ en fonction de $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$. En déduire que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC}$.
3. Montrer que $(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AH}).\overrightarrow{BH} = 0$.
4. En déduire que, si J est le milieu de [IH], (AJ) et (BH) sont orthogonales.



1. Comme la médiane issue de A est confondue avec la hauteur, (AI) et (BC) sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = 0$, donc $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{HC} = 0$, d'où $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CH}$.
2. Comme I est le milieu de [BC], $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$, d'où $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IC} = 2\,\overrightarrow{HI}$.
   Comme $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HI} = 0$, $\overrightarrow{AH}.2\,\overrightarrow{HI} = 0$, donc $\overrightarrow{AH}.(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) = 0$, d'où $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC}$.
3. $(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AH}).\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{CH} = 0$.
4. Si J est le milieu de [IH], $\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{JH} = \overrightarrow{0}$, d'où $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JH} = 2\,\overrightarrow{AJ}$, donc $2\,\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BH} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AH}).\overrightarrow{BH} = 0$, donc (AJ) et (BH) sont orthogonales.

Exercice 4 :

Soit ABC un triangle tel que AB = 5, AC = 7 et $\widehat{BAC} = 60°$.

1. Quelle est la longueur BC.
2. Donner à 10^{-1} près la mesure en degré des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

1. D'après l'égalité d'Al Kashi, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \cos\widehat{BAC} = 25 + 49 - 70 \times \frac{1}{2} = 39$, donc $BC = \sqrt{39}$.

2. D'après la loi des sinus, $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC \sin \widehat{BAC}}{BC} = \dfrac{7 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{39}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{39}}$, d'où $\widehat{ABC} \simeq 76{,}1°$ ou $\widehat{ABC} \simeq 103{,}9°$.

D'après la loi des sinus, $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{AB \sin \widehat{BAC}}{BC} = \dfrac{5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{39}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{39}}$, d'où $\widehat{ACB} \simeq 43{,}9°$ ou $\widehat{ACB} \simeq 136{,}1°$.

Or la somme des trois angles faisant 180°, on a forcément $\widehat{ABC} \simeq 76{,}1°$ et $\widehat{ACB} \simeq 43{,}9°$.

Exercice 5 :

On se place dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ un repère orthonormal du plan.

Soient A(1 ; – 1), B(3 ; 2) et I(5 ; 3) trois points du plan.

1. Déterminer l'équation cartésienne de la droite δ perpendiculaire à (AI) passant par B.

2.a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) En calculant $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ d'une autre manière, en déduire à 0,1 degré près, une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

3.a) Déterminer le centre et le rayon du cercle C d'équation $x^2 - 10x + y^2 - 6y + 30 = 0$.

b) Déterminer les coordonnées des deux points de contact des deux tangentes à C issues de A.

1. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de δ, donc $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ aussi, δ a donc une équation de la forme $x + y + c = 0$.

B ∈ δ, donc $3 + 2 + c = 0$, donc $c = -5$ et l'équation de δ est $x + y - 5 = 0$.

2.a) $x^2 - 10x + y^2 - 6y + 30 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 - 25 + (y-3)^2 - 9 + 30 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-3)^2 = 4$,

donc il s'agit de l'équation de C(I ; 2).

b) M(x ; y) est le point de contact d'une tangente à C issue de A $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{IM} = 0 \\ M \in C \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-5) + (y+1)(y-3) = 0 \\ x^2 - 10x + y^2 - 6y + 30 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 2y + 2 = 0 \\ x^2 - 10x + y^2 - 6y + 30 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 2y + 2 = 0 \\ 4x + 4y - 28 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + (-x+7)^2 - 2(-x+7) + 2 = 0 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 18x + 37 = 0 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9+\sqrt{7}}{2} \text{ et } y = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

ou

$$x = \frac{9-\sqrt{7}}{2} \text{ et } y = \frac{5+\sqrt{7}}{2}.$$

VI. Trigonométrie :

Exercice 1 :

1. Convertir en degré les angles suivants dont les mesures sont données en radian : $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{5}$; $\frac{7\pi}{6}$.

2. Convertir en radian les angles suivants dont les mesures sont données en degré : 36 ; – 45 ; 90.

1. $\frac{2\pi}{3}$ radian correspond à une mesure de 120° ;

$\frac{4\pi}{5}$ radian correspond à une mesure de 144° ;

$\frac{7\pi}{6}$ radian correspond à une mesure de 210°.

2. 36° correspond à une mesure de $\frac{\pi}{5}$ radians ;

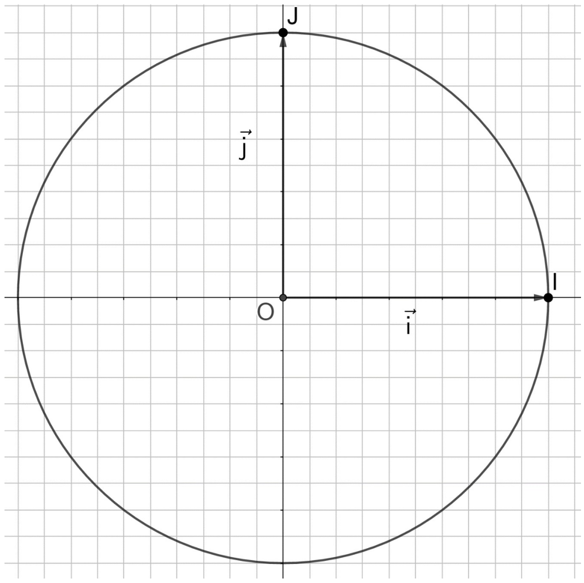
$-45°$ correspond à une mesure de $-\frac{\pi}{4}$ radian ;

$90°$ correspond à une mesure de $\frac{\pi}{2}$ radian.

Exercice 2 :

Soit un cercle C trigonométrique dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Les points devront être construits juste en utilisant une règle et sans calcul, les traits de construction devront apparaître.



1.a) Donner une mesure principale de $\frac{35\pi}{4}$.

b) Donner les valeurs de $\cos\left(\frac{35\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{35\pi}{4}\right)$.

c) Placer le point M de C tel que $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM}) = \frac{35\pi}{4}$ $[2\pi]$.

2.a) Donner une mesure principale de $\frac{4\pi}{3}$.

b) Donner les valeurs de $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

c) Placer le point N de C tel que $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{ON}) = \frac{4\pi}{3}$ $[2\pi]$.

3.a) Donner une mesure principale de $-\frac{\pi}{6}$.

b) Donner les valeurs de $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

c) Placer le point P de C tel que $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OP}) = -\frac{\pi}{6}$.

1.a) $\frac{35}{4} = 8{,}75$, donc $\frac{35\pi}{4} - 8\pi = \frac{3\pi}{4}$ la mesure principale de $\frac{35\pi}{4}$.

b) $\cos\left(\frac{35\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{35\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.a) $\frac{4}{3} \simeq 1,\ldots$, donc $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$ la mesure principale de $\frac{4\pi}{3}$.

b) $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

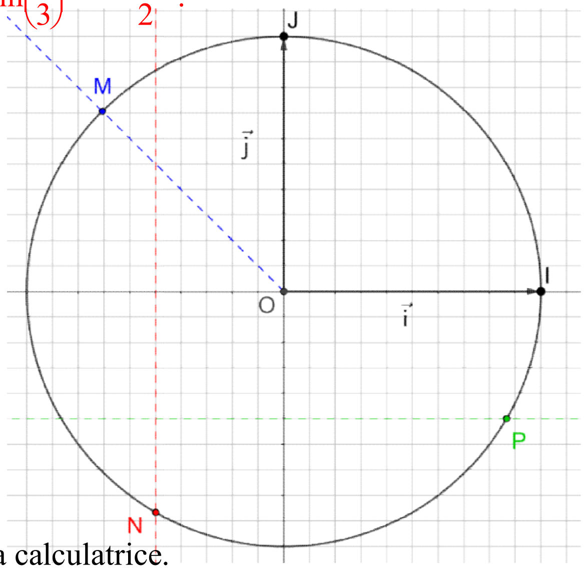
ou

$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et

$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.a) $-\pi < -\frac{\pi}{6} \leq \pi$, donc $-\frac{\pi}{6}$ est la mesure principale de $-\frac{\pi}{6}$.

b) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.



Exercice 3 :

1. Donner, en le justifiant, le signe des nombres suivants sans utiliser la calculatrice.

a) $\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$; b) $\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$.

2. Sachant que $\cos(x) = 0{,}6$ et que $x \in]-\pi ; 0]$, donner la valeur de $\sin(x)$.

1.a) $\frac{4\pi}{7} \in]\frac{\pi}{2} ; \pi[$, donc $\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) < 0$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$;

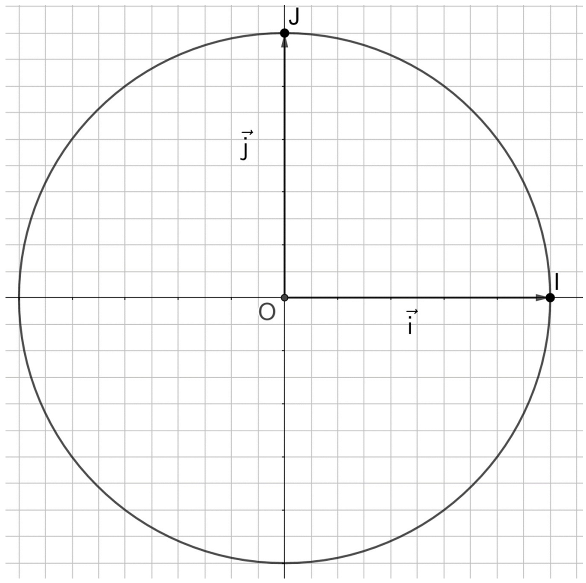
b) $-\frac{3\pi}{7} \in \left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$, donc $\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right) > 0$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right) < 0$.

2. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$.
Comme $x \in]-\pi ; 0]$, $\sin(x) < 0$, donc $\sin(x) = -0{,}8$.

Exercice 4 :

En s'aidant du cercle trigonométrique, résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in]-2\pi ; 2\pi]$.
2. $\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ et $x \in]-\pi ; \pi]$.
3. $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in]0 ; 2\pi]$. (On pourra colorier l'ensemble des solutions)
4. $-\frac{1}{2} \leq \cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in]-\pi ; \pi]$.
(On pourra colorier l'ensemble des solutions d'une autre couleur)



1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi$, $k, k' \in \mathbb{Z}$

$-2\pi < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{13\pi}{6} < 2k\pi \leq \frac{11\pi}{6}$ ou $-2\pi < -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{11\pi}{6} < 2k'\pi \leq \frac{13\pi}{6}$

$\Leftrightarrow -\frac{13}{12} < k \leq \frac{11}{12}$ $\qquad$ $\Leftrightarrow -\frac{11}{12} < k' \leq \frac{13}{12}$

$\Leftrightarrow k \in \{-1 ; 0\}$ $\qquad$ $\Leftrightarrow k' \in \{0 ; 1\}$

On a donc $S = \{-\frac{11\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\}$.

2. $\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k'\pi$, $k, k' \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{\pi}{3} + 2k'\pi$, $k, k' \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + k'\pi$, $k, k' \in \mathbb{Z}$.

$-\pi < -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} < k\pi \leq \frac{7\pi}{6}$ ou $-\pi < \frac{\pi}{6} + k'\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{6} < k'\pi \leq \frac{5\pi}{6}$

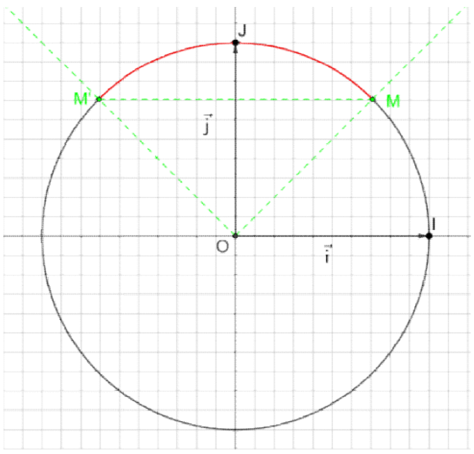
$\Leftrightarrow -\frac{5}{6} < k \leq \frac{7}{6}$ $\qquad$ $\Leftrightarrow -\frac{7}{6} < k' \leq \frac{5}{6}$

$\Leftrightarrow k \in \{0 ; 1\}$ $\qquad$ $\Leftrightarrow k' \in \{-1 ; 0\}$

$S = \{-\frac{7\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\}$.

3. $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k'\pi \leq x \leq \pi + 2k'\pi$, $k, k' \in \mathbb{Z}$.



Sur $[0 ; 2\pi]$, $S = \{\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\}$, donc en parcourant le cercle entre 0 et 2π,

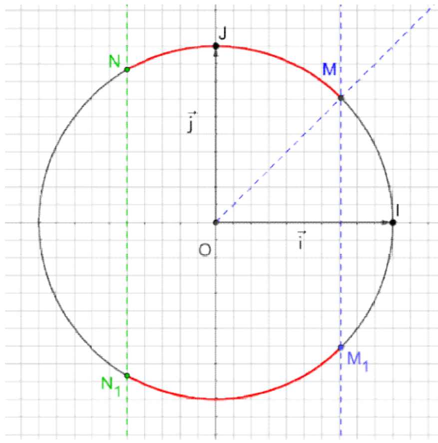
on a $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow [\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}]$.

4. $-\frac{1}{2} \leq \cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in]-\pi ; \pi]$.

Comme sur $]-\pi\,;\pi]$, $\cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ et

$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$

$-\frac{1}{2} \leq \cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in [-\frac{2\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{4}[\cup [\frac{\pi}{4}\,;\frac{2\pi}{3}]$.



Exercice 5 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) + 2\sin(4x)$.

   a) Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

   b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, comparer $f(x + \pi)$ et $f(x)$.

   c) Déduire de ce qui précède la parité et la périodicité de la fonction f.
   Quel est le plus petit intervalle sur lequel on peut l'étudier ?

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$.

   a) Quelle est la parité de f ?
   b) Quelle est la plus petite valeur de T pour que f soit de période T.

1.a) $f(0) = \cos(0) + 2\sin(0) = 1$.

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left(4 \times \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\sin(\frac{2\pi}{3}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$,

d'où $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$.

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \times \frac{-\pi}{6}\right) + 2\sin\left(4 \times \frac{-\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2\sin(-\frac{2\pi}{3}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$,

d'où $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f(x + \pi) = \cos[2(x + \pi)] + 2\sin[4(x + \pi)] = \cos(2x + 2\pi) + 2\sin(4x + 4\pi) = \cos(2x) + 2\sin(4x) = f(x)$.

c) Comme $f\left(\frac{\pi}{6}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, f ne peut pas être paire et, comme $f(0) \neq -f(-0)$, f ne peut pas être impaire, elle n'est donc ni paire, ni impaire, mais elle est de période π, donc on peut l'étudier sur $[0 : \pi]$.

2.a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \cos\left(-\frac{x}{2} + \pi\right) = \cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right) = \cos\left(\frac{x}{2} - \pi + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = f(x)$, donc f est paire.

b) f de période T $\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\frac{x+T}{2} + \pi\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\frac{x}{2} + \pi + \frac{T}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$, $\frac{T}{2} = 2\pi$ et $T = 4\pi$.